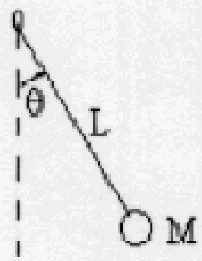
Tentamen Golven en Optica (20/11/97, 13.00-16.00)

Begin iedere opgave op een apart vel papier en zet daarop je naam. Vermeld op het eerste vel je naam, geboortedatum, studentnummer, studierichting, eerste jaar van inschrijving, adres met postcode, en het aantal ingeleverde bladen.

Vraagstukken 1 en 2 gelden als AN3a, uitsluitend voor ouderejaars die AN3b al gehaald hebben (vermeld dan 'AN3a' op het eerste vel); vraagstukken 3 en 4 gelden als AN3b, uitsluitend voor ouderejaars die AN3a al gehaald hebben (vermeld dan 'AN3b' op het eerste vel); alle overigen kunnen uitsluitend een ongedeeld tentamen (vraagstukken 1 t/m 4) doen.
(Tentamentijd voor iedereen 13.00-16.00; puntenverdeling: 1=20[5+5+5+5], 2=20[4+4+4+4+4], 3=20[4+4+4+4+2+2], 4=20[5+5+5+5]).

Vraagstuk 1



Gegeven is een slinger met lengte L waar een massa M aan hangt. Met behulp van een inductie-rem wordt de slinger gedempt, zodanig dat de dempingskracht recht evenredig is met de snelheid (de evenredigheids-constante is b; verder is gedefinieerd: $\gamma = b/M$). De (hoek)uitwijking van de slinger is θ, en is klein.

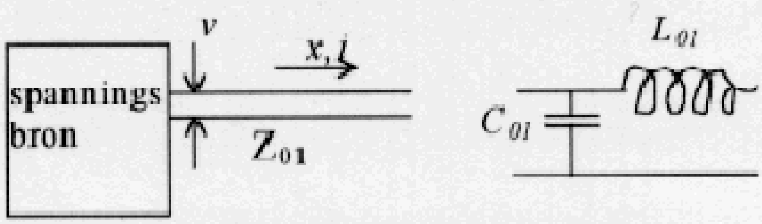
a. Stel zowel de bewegingsvergelijking voor de slinger op (in termen van θ), als de energievergelijking, en bereken voor het geval $\gamma = 0$ uit elk van beide vergelijkingen de eigenfrequentie van de slinger.

b. Afhankelijk van de waarde van γ kunnen er drie verschillende regimes van demping worden onderscheiden. Benoem deze, en leid voor elk regime de algemene oplossing van de bewegingsvergelijking af, en voor welke waarden van γ (in termen van M en L) dat regime geldt.

c. Gegeven is dat op tijdstip $t=0$ geldt dat $\theta=0$ en $d\theta/dt = c$, met c een constante. Bereken nu θ als functie van t voor het geval dat de slinger licht gedempt is. Schets θ als functie van t.

d. Geef de definitie van de Q-factor van een gedempt systeem, en geef in de schets bij **c** aan hoe aan de Q-factor een eenvoudige interpretatie kan worden gegeven in termen van het aantal oscillaties.

Vraagstuk 2



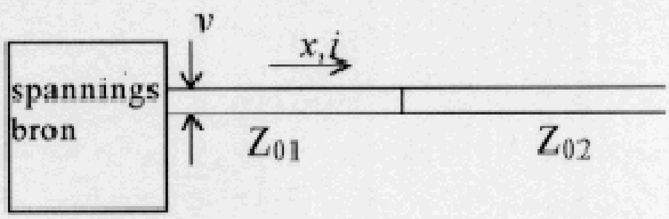
Gegeven is een verliesvrije coaxkabel met een ingangsimpedantie Z_{01}, die met een spanningsbron is verbonden. In de lengterichting heeft de kabel een impedantie L_{01} (H/m), in de dwarsrichting een impedantie C_{01} (F/m), met $L_{01} = \frac{\mu}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}$ en $C_{01} = 2 \cdot \pi \cdot \varepsilon / \ln \frac{r_2}{r_1}$,

waarin r_2 de straal van het afschermingsfolie is en r_1 de straal van de middendraad, ε de diëlectrische constante en μ de magnetische permeabiliteit.

a. Leid de algemene differentiaalvergelijking af voor de stroom i als functie van de plaats x in de coaxkabel.

b. Laat zien dat $i(x) = A \cdot e^{-\gamma \cdot x} + B \cdot e^{\gamma \cdot x}$ een oplossing is van de differentiaalvergelijking bij a, en dat daar $v(x) = Z_{01} \cdot (A \cdot e^{-\gamma \cdot x} - B \cdot e^{\gamma \cdot x})$ uit volgt. Geef een uitdrukking voor Z_{01}, en laat zien dat voor γ geldt: $\gamma = i\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$

c. Geef de uitdrukking voor de lopende (spannings)golf in de positieve x-richting in de transmissielijn. Wat is de snelheid van deze lopende golf?



Nu wordt een tweede kabel gekoppeld aan de eerste door middel van een koppelstukje. De tweede kabel, die als half-oneindig beschouwd mag worden, heeft een ingangsimpedantie Z_{02}.

d. Formuleer de randvoorwaarden voor i en v ter plekke van het koppelstuk (kies hiervoor voor het gemak de oorsprong van de x-as op de plaats van het koppelstuk), en leid hieruit af dat bij de impedantiesprong voor de spanningsamplitude van de weerkaatste en doorgelaten golven moet gelden:

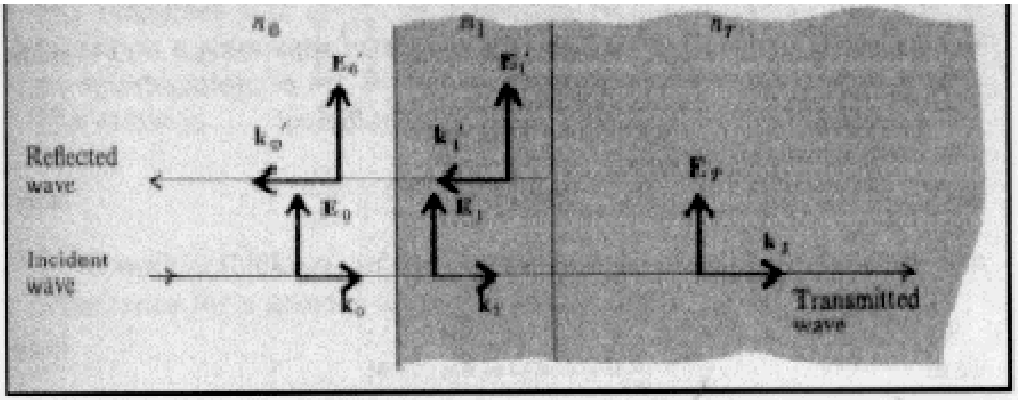
doorgelaten: $v_d = \frac{2 \cdot Z_{01}}{Z_{01} + Z_{02}} \cdot v_i$, weerkaatst: $v_w = \frac{Z_{01} - Z_{02}}{Z_{01} + Z_{02}} \cdot v_i$

met v_i de amplitude van de invallende (spannings)golf.

e. Hoeveel procent van het gemiddelde vermogen van de invallende (spannings)golf wordt er doorgegeven na de impedantiesprong? Neem Z_{01}=50 Ω en Z_{02}=75 Ω.

Vraagstuk 3

Beschouw een laag ter dikte l van een diëlectrisch medium met brekingsindex n_l die zich bevindt tussen twee media met brekingsindices n_0 respectievelijk n_T. Van links valt, loodrecht op de grensvlakken, licht in met een golfvector $\vec{k}_0$. Dit geeft aanleiding tot gereflecteerd en doorgelaten licht zoals aangegeven in de figuur.



Gegeven is dat de eis van continuïteit voor de electrische en de magnetische velden op de beide grensvlakken de volgende relaties oplevert tussen de diverse (complexe) veldsterktes:

$$
\begin{aligned}
&E_0 + E_0' = E_1 + E_1' \\
&n_0 E_0 - n_0 E_0' = n_1 E_1 - n_1 E_1' \\
&E_1 e^{ikl} + E_1' e^{-ikl} = E_T \\
&n_1 E_1 e^{ikl} - n_1 E_1' e^{-ikl} = n_T E_T
\end{aligned}
$$

waarin $k = \left|\vec{k}_1\right|$, met $\vec{k}_1$ de golfvector in het medium met brekingsindex n_1.

a. Laat zien dat hieruit volgt:

$$
\begin{aligned}
&E_0 + E_0' = E_T(\cos kl - i\frac{n_T}{n_1}\sin kl) \\
&n_0 E_0 - n_0 E_0' = E_T(-i n_1 \sin kl + n_T \cos kl)
\end{aligned}
$$

Beschouw nu het geval dat de laag een optische dikte heeft van 1/4 golflengte: $kl = \pi / 2$.

b. Laat zien dat dan geldt:

$$
t = \frac{2 i n_0 n_1}{n_T n_0 + n_1^2}
$$

$$
r = \frac{n_T n_0 - n_1^2}{n_T n_0 + n_1^2}
$$

waarin $t = E_T / E_0$ de transmissiecoëfficiënt is, en $r = E_0' / E_0$ de reflectiecoëfficiënt.

c. Toon voor de situatie in onderdeel **b** aan dat de som van de irradiantie van het gereflecteerde licht en het doorgelaten licht gelijk is aan de radiantie van het invallende licht. Gegeven: voor de irradiantie I van een electrisch veld met amplitude E in een medium met brekingsindex n geldt $I = \frac{n}{2Z_0}\left|E\right|^2$, met Z_0 de impedantie van het vacuum (377 Ω).

Het resultaat uit onderdeel **b** is relevant voor de keuze van de brekingsindex n_1 van een coating-materiaal van een glazen lens (n_T = 1.5) die vanuit lucht (n_0 = 1) belicht wordt.

d. Geef de fysische interpretatie van het begrip reflectantie, met $R = |r|^2$. Voor welke keuze van n_1 is de refectantie voor het bovenstaande geval gelijk aan nul?

e. Hoe groot is de reflectantie als magnesium-fluoride (n_1 = 1.35) voor de coating wordt gebruikt?

f. Hoe groot is de reflectantie als *geen* coating wordt gebruikt?

Vraagstuk 4

a. Bereken het Fraunhofer diffractiepatroon van een enkele spleet met breedte b met behulp van de vereenvoudigde Fresnel-Kirchhoff formule voor Fraunhofer diffractie. Schrijf de uiteindelijke formule voor de amplitude op als functie van b en ν ($= k \cdot \sin\theta$) en normaliseer op zodanige wijze dat de amplitude voor ν=0 gelijk is aan $0.5 \cdot b$.

b. Vervolgens wordt er voor de apertuur een filter gezet. De amplitude-transmissie van dit filter wordt gegeven door een driehoeksfunctie rond y=0:

$$g(y) = \begin{cases} 2\cdot[y+(b/2)]/b & \text{als } y \leq 0 \\ 2\cdot[(b/2)-y]/b & \text{als } y > 0 \end{cases}$$

Bereken opnieuw de amplitude van het diffractiepatroon als functie van de spatiële frequentie ν en van b, maar nu met behulp van een Fourier transformatie van de apertuurfunctie. Gegeven is: $\int (x \cdot e^{ax})dx = e^{ax}(x-(1/a))/a$.

c. Bereken vervolgens de *intensiteiten* van de 'gewone spleet' (opgave a) en de spleet met een filter ervoor (opgave **b**). Bereken in beide gevallen de plaats van het eerste minimum.

d. Neem nu b=1 en schets in één tekening beide intensiteitsfuncties als functie van ν. Is het filter dat is gebruikt een goed apodisatie-filter? Waarom wel/niet?